



الرياضيات

Hard_equation

الأعداد المركبة

وفق البرنامج الرسمي

Mathématique

BAC



الأعداد المركبة

1 - تعريف : نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب على الشكل $z = x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان و $i^2 = -1$.

ملاحظات :

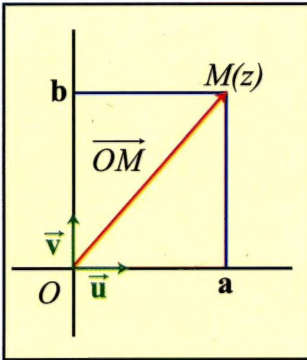
- نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـ C .
- العدد الحقيقي x يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب z ونرمز له بالرمز $Re(z)$.
- العدد الحقيقي y يسمى الجزء التخيلي للعدد المركب z ونرمز له بالرمز $Im(z)$.
- إذا كان $y = 0$ نقول أن العدد المركب z حقيقي.
- إذا كان $x = 0$ نقول أن العدد المركب z تخيلي صرف (بحت).
- يكون العدد المركب z معدوما جزؤه الحقيقي معدوما وجزؤه التخيلي معدوما أي $z = 0$ يعني أن $x = 0$ و $y = 0$.
- الكتابة $z = x + iy$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z .

2 - تساوي عددين مركبين :

- يكون عدنان مركبان z و z' متساويان إذا وفقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي ونفس الجزء التخيلي.
- لدينا: $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$
- $z = z'$ يعني أن: $x = x'$ و $y = y'$.

التمثيل الهندسي لعدد مركب :

- المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
- كل عدد مركب $z = x + iy$ مع x و y عدنان حقيقيان و $i^2 = -1$ يرفق بالنقطة M إحداثياتها $(x; y)$ ، النقطة M تسمى صورة العدد المركب z والشعاع \overrightarrow{OM} يسمى كذلك **صورة** العدد المركب z .
- كل نقطة M هي صورة عدد مركب وحيد $z = x + iy$ ، نقول أن z لاحقة النقطة M والشعاع \overrightarrow{OM} .
- محور الفواصل يسمى **المحور الحقيقي** لأن الأعداد الحقيقية هي لواحق نقط محور الفواصل.
- محور الترتيب يسمى **المحور التخيلي** لأن كل عدد تخيلي صرف هي لاحقة نقطة من محور الترتيب.
- المستوي يسمى المستوي المركب.



3 - العمليات في مجموعة الأعداد المركبة :

مجموع و جداء عددين مركبين :

- z عدد مركب حيث: $z = x + iy$ مع x و y عدنان حقيقيان و $i^2 = -1$ و z' عدد مركب حيث: $z' = x' + iy'$ مع x' و y' عدنان حقيقيان و $i^2 = -1$.
- مجموع العددين z و z' هو العدد المركب $(x + x' + (y + y')i)$
- جداء العددين z و z' هو العدد المركب $(xx' - yy' + (xy' + x'y)i)$

أمثلة : $(3 + 2i) + (-5 - 3i) = (3 - 5) + (2 - 3)i = -2 - i$

$(3 + 2i) \times (-5 - 3i) = -15 - 9i - 10i + 6 = -9 - 19i$

التفسير الهندسي لمجموع عددين مركبين :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

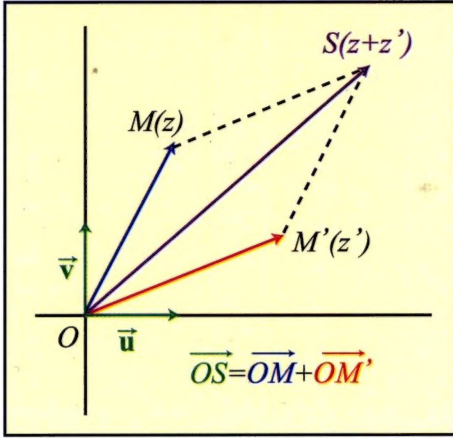
$z = x + iy$ عدد مركب حيث

و $z' = x' + iy'$ عدد مركب، حيث :

مجموع العددين z و z' هو لاحقة النقطة S حيث :

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$$

\overrightarrow{OS} هي محصلة الشعاعين \overrightarrow{OM} و $\overrightarrow{OM'}$.



لاحقة شعاع ، لاحقة مرجح :

خاصية : المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$.

A و B نقطتان من المستوي ، لاحقة A و Z_B لاحقة B .

$Z_A Z_B$ هي لاحقة الشعاع \overrightarrow{AB} .

α و β عدنان حقيقيان حيث $\alpha + \beta \neq 0$ ، G مرجح الجملة $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$.

هي لاحقة النقطة G $\frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$.

ملاحظة : تستعمل نفس الطريقة في حساب لاحقة مرجح عدة نقط.

4 - مقلوب عدد مركب :

مبرهنة : كل عدد مركب غير معدوم z له مقلوب في C يرمز له $\frac{1}{z}$.

مرافق عدد مركب :

تعريف :

$z = x + iy$ عدد مركب حيث x و y عدنان حقيقيان و $i^2 = -1$.

العدد المركب $x - iy$ والذي نرمز له \bar{z} يسمى مرافق العدد المركب z .

أمثلة : $\overline{-4i} = 4i$ ، $\overline{-2 - 3i} = -2 + 3i$ ، $\overline{5 + 4i} = 5 - 4i$

خواص مرافق عدد مركب :

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) \quad \bullet \quad \bar{\bar{z}} = z \quad \bullet$$

$$z + \bar{z} = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 \quad \bullet \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z) \quad \bullet$$

المرافق و العمليات :

$$\begin{aligned}
 & Z \text{ عدد مركب و مرافقه } \bar{Z}, \quad Z' \text{ عدد مركب و مرافقه } \bar{Z}' . \\
 & (n \in \mathbb{N}^*) . \bar{Z}^n = \overline{Z^n} \bullet \quad \overline{ZZ'} = \bar{Z} \cdot \bar{Z}' \bullet \quad \overline{Z + Z'} = \bar{Z} + \bar{Z}' \bullet \\
 & \bullet \quad \overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}'} \text{ مع } Z' \neq 0 \bullet \quad \bullet \quad \overline{\left(\frac{1}{Z}\right)} = \frac{1}{\bar{Z}} \text{ مع } Z \neq 0 \bullet
 \end{aligned}$$

طويلة وعمدة عدد مركب :

1 - طويلة عدد مركب :

تعريف : عدد مركب حيث : $Z = x + i y$ (x و y عدنان حقيقيان).

نسمة طويلة العدد المركب Z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له $|Z|$ حيث $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
أمثلة :

$$|-8 - 6i| = \sqrt{64 + 36} = 10 \bullet \quad |2 - 5i| = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} \bullet$$

$$|-7i| = \sqrt{49} = 7 \bullet$$

ملاحظات : إذا كان Z عددا حقيقيا فإن طويلة Z هي القيمة المطلقة للعدد Z .

$$|Z|^2 = x^2 + y^2 \bullet \quad |Z| = 0 \text{ يعني } z = 0 \bullet$$

التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$.

Z عدد مركب حيث $Z = x + i y$ إذا كانت M صورة Z فإن : $OM = |Z|$

خواص طويلة عدد مركب :

خواص : من أجل كل عددين مركبين Z و Z' .

$$|-Z| = |Z| \bullet \quad |\bar{Z}| = |Z| \bullet$$

$$|Z \cdot Z'| = |Z| |Z'| \bullet \quad \text{مع } Z' \neq 0 \quad \left| \frac{Z}{Z'} \right| = \frac{|Z|}{|Z'|} \bullet$$

$$|Z^n| = |Z|^n \bullet \quad (n \in \mathbb{N}) . |Z + Z'| \leq |Z| + |Z'| \bullet \quad \text{(المتباينة الثلاثية)} .$$

ملاحظة : A و B نقطتان لاحتقاهما Z_A و Z_B على الترتيب : $AB = |Z_B - Z_A|$.

2 - عمدة عدد مركب غير معدوم :

تعريف : Z عدد مركب غير معدوم حيث : $Z = x + i y$ (x و y عدنان حقيقيان).

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ لتكن M صورة Z .
نسمة عمدة العدد المركب Z و نرمز $\arg(Z)$ كل قيس بالريديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$.

ملاحظات :

كل عدد مركب غير معدوم z له عدد غير منته من العمد.
إذا كان θ عمدة z فإن $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) عمدة z .
ونكتب $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$.

A و B نقطتان لأحقتاهما Z_A و Z_B على الترتيب.
 $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \arg(Z_B) - \arg(Z_A)$ أي $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$
 $\arg(Z_B - Z_A) = (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{AB})$

الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم :

1 - تعريف و خواص :

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ تعلم نقطة M بإحداثيها الديكارتية $(x; y)$ أو بإحداثيها القطبية $(r; \theta)$. حيث : $OM = r$ و $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \theta [2\pi]$
ولدينا $x = r \cos(\theta)$ و $y = r \sin(\theta)$

تعريف :

z عدد مركب غير معدوم ، العدد z يكتب على الشكل :

$$z = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

حيث : $r = |z|$ و $\theta = \arg(z)$

هذا الشكل يسمى الشكل المثلثي لـ z .

ملاحظة : إذا كان $z = x + iy$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} \text{ و } \sin(\theta) = \frac{y}{r}$$

خاصية -1 : يكون عدنان مركبان مكتوبان على الشكل المثلثي متساويين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس الطويلة وعمدتان متوفقتان بترديد 2π .

خاصية -2 : إذا كان $z = \lambda(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ وكان $\lambda > 0$ فإن $\lambda = |z|$ و $\theta = \arg(z)$.

2 - خواص عمدة عدد مركب غير معدوم :

خواص z و z' عدنان مركبان غير معدومين.

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad \bullet \quad \arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z') \quad \bullet$$

$$n \in \mathbb{N}^* \quad \bullet \quad \arg(z^n) = n \arg(z) \quad \bullet$$

الشكل الأسّي لعدد مركب غير معدوم :

1 - الشكل الأسّي لعدد مركب طويلته 1 :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$. z_0 عدد مركب طويلته 1 و M_0 صورته، لتكن θ عمدة لـ z_0 .

$z_0 = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ ، لتكن f الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي θ العدد المركب الذي طويلته 1 و θ عمدة ، أي $f(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

θ و θ' عدنان حقيقيان لنحسب $f(\theta + \theta')$ و $f(\theta) \cdot f(\theta')$.

أي : $f(\theta + \theta') = (\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')) + i(\sin(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta')\cos(\theta))$

$f(\theta) \cdot f(\theta') = (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) (\cos(\theta') + i \sin(\theta'))$

أي : $f(\theta) \cdot f(\theta') = (\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')) + i(\sin(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta')\cos(\theta))$

ونستنتج أن : $f(\theta + \theta') = f(\theta) \cdot f(\theta')$

بما أن الدالة الأسية تحول مجموع عددين إلى جداء صورتيهما تم التفكير في الترميز الأسّي للعدد z_0 .
نضع : $z_0 = e^{i\theta}$

تعريف : العدد المركب الذي طويلته 1 و θ عمدة له يكتب $e^{i\theta}$. حيث $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.
هذا الرمز يسمى ترميز أولر.

2 - الشكل الأسّي لعدد مركب غير معدوم :

تعريف : العدد المركب Z غير المعدوم الذي طويلته r و θ عمدة له يكتب $z = r e^{i\theta}$.

هذه الكتابة تسمى الشكل الأسّي للعدد المركب Z .

3 - قواعد الحساب على الشكل الأسّي :

خواص : θ و θ' عدنان حقيقيان.

$$\bullet e^{-i\theta} = e^{i\theta} \quad \bullet \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')} \quad \bullet e^{i(\theta + \theta')} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'}$$

4 - دستور موافر :

خواص : عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

المعادلات من الدرجة الثانية

1 - تساوي عددين مركبين :

مبرهنة : يكون عدنان مركبان Z و Z' متساويين إذا وفقط إذا كان لهما نفس الطويلة ، نفس الجزء الحقيقي ونفس الجزء التخيلي.

$$\begin{cases} |z| = |z'| \\ \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(z') \end{cases} \quad \text{معناه} \quad z = z'$$

2 - الجذران التربيعيان لعدد مركب :

تعريف : W عدد مركب يسمى حلا للمعادلة $z^2 = w$ في المجموعة C الجذران التربيعي للعدد w.

أمثلة : - الجذران التربيعيان للعدد $3 - 4i$ هما $2 - i$ و $-2 + i$.

- الجذران التربيعيان للعدد -9 هما $3i$ و $-3i$.

ملاحظة : كل عدد مركب غير معدوم يقبل جذرين تربيعيين متناظرين.

3 - المعادلات من الدرجة الثانية :

لتكن المعادلة ذات المجهول المركب Z : $az^2 + bz + c = 0$(1) حيث a, b, c أعداد مركبة و $a \neq 0$

بوضع $\Delta = b^2 - 4ac$ نحصل على $\Delta = b^2 - 4ac$ $az^2 + bz + c = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$

حل المعادلة (1) يؤول إلى حل المعادلة $\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

حل المعادلة (1) يؤول إلى تعيين الجذران التربيعيين للعدد Δ .

مبرهنة : لتكن المعادلة ذات المجهول المركب Z : $az^2 + bz + c = 0$ حيث a, b, c أعداد مركبة

و $a \neq 0$ ، $\Delta = b^2 - 4ac$ مميزها.

• إذا كان $\Delta = 0$ ، المعادلة تقبل حلا مضاعفا $z = -\frac{b}{2a}$

• إذا كان $\Delta \neq 0$ ، المعادلة تقبل حلين متمايزين : $z' = \frac{-b - w}{2a}$ و $z'' = \frac{-b + w}{2a}$

حيث w جذر تربيعي لـ Δ .

ملاحظة : إذا كان z' و z'' حلي المعادلة فإن من أجل كل عدد مركب z :

$$az^2 + bz + c = a(z - z')(z - z'')$$

مثال : حلا المعادلة $z^2 - z + 1 = 0$ هما : $z' = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z'' = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

التحويلات النقطية

تذكير حول التحويلات النقطية المألوفة :

1 - الانسحاب :

تعريف : الانسحاب الذي شعاعه \vec{u} هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطي M'

من المستوي حيث : $\vec{MM'} = \vec{u}$

خواص : الانسحاب الذي شعاعه \vec{u} هو تحويل نقطي تقابلي و تحويله العكسي هو الانسحاب الذي شعاعه $(-\vec{u})$

الانسحاب الذي شعاعه غير معدوم لا يقبل أية نقطة صامدة و الانسحاب الذي شعاعه $\vec{0}$ هو التحويل الثابت.

الخاصة المميزة : صورة ثنائية (A, B) هي ثنائية (A', B') تحقق $\vec{AB} = \vec{A'B'}$

الانسحاب تقايس.

2 - التحاكي :

تعريف : Ω نقطة ثابتة و k عدد حقيقي غير معدوم التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k هو التحويل النقطي

الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطي M' من المستوي حيث : $\vec{\Omega M'} = k\vec{\Omega M}$. $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

خواص :

إذا اختلفت M عن Ω فإن M' تختلف عن Ω والنقط M, Ω على استقامة واحدة.
 $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$ يعني $\overrightarrow{\Omega M} = \frac{1}{k} \overrightarrow{\Omega M'}$ ونستنتج أن : التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k هو تحويل
 نقطي تقابلي و تحويله العكسي هو التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته $\frac{1}{k}$.
 الخاصة المميزة : صورة ثنائية (A, B) بالتحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k هي الثنائية (A', B')
 التي تحقق : $A'B' = kAB$.
 نلاحظ أنه إذا كان $|k| \neq 1$ فإن $A'B' \neq AB$ وبالتالي فإن التحاكي ليس تقاييساً.

3 - الدوران :

تعريف : w نقطة من المستوي الموجه و θ عدد حقيقي.
 الدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ هو التحويل النقطي الذي يرفق النقطة Ω بنفسها و يرفق بكل نقطة M
 تختلف عن Ω النقطة M' حيث : $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$ و $\angle(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$
 خواص :

الدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ غير معدومة له نقطة صامدة و حيدة هي المركز Ω .
 الدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ تحويل تقابلي و تحويله العكسي هو الدوران الذي مركزه Ω وزاويته $(-\theta)$.
 الخاصة المميزة : صورة كل ثنائية (A, B) بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ هي ثنائية (A', B')
 تحقق ما يلي : $A'B' = AB$ و $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$ تبين هذه النتيجة أن الدوران تقاييس.

الأعداد المركبة و التحويلات النقطية

في كل ما يأتي المستوي المركب الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث
 $z' = az + b$ مع $a \in R^*$ أو $a \in C$ و $|a| = 1$ و نكتب $f(M) = M'$ يعني $z' = az + b$.

1 - الحالة الأولى $a = 1$:

$f(M) = M'$ يعني $z' = z + b$ ، وبالتالي $z' - z = b$ وبما أن $z' - z$ هي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{MM'}$
 فإن $\overrightarrow{MM'} = \vec{U}$ حيث \vec{U} صورة العدد المركب b و بالتالي التحويل f هو الانسحاب الذي شعاعه \vec{U}
 ذو اللاحقة b .

خاصية : التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :
 $z' = z + b$ (b عدد مركب) هو انسحاب شعاعه \vec{U} صورة b .

2 - الحالة الثانية $\{1\} \neq a \in R^*$:

خاصية : التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث
 $z' = az + b$ مع a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 و b عدد مركب ، هو التحاكي الذي مركزه
 النقطة Ω ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ ونسبته a .

3 - الحالة الثالثة $a \in C$ و $|a| = 1$:

خاصية : التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = az + b$
 مع a عدد مركب غير حقيقي طويلته 1 و b عدد مركب ، هو الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ ،
 وزاويته $\arg(a)$.

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي
و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة. 😊

Hard_equation